# 4　刚体转动

任课教师　曾灏宪

中原工学院　理学院

大学物理（上）

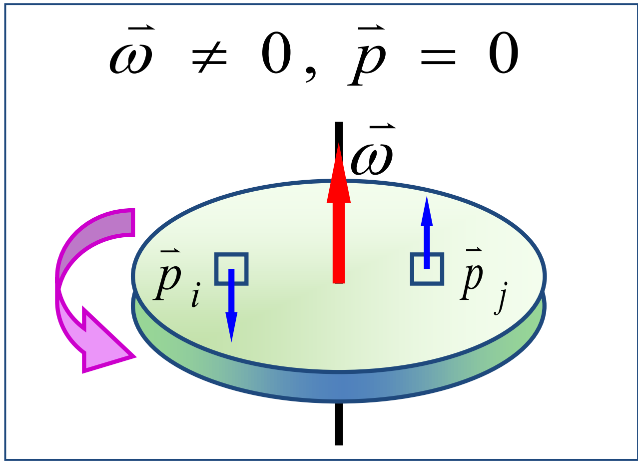
4　刚体转动

# 4.3 角动量 角动量守恒定律

| | |
|---|---|
| $\vec{F} = m\vec{a}$ | $\vec{M} = J\vec{\alpha}$ |
| $m$ | $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad J = \int r^2 dm$ |
| $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ | $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ |
| $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | $\omega = \frac{d\theta}{dt}$,右手螺旋 |
| $\vec{p} = m\vec{v}, E_k = \frac{1}{2}mv^2$ | ? |

质点运动状态的描述 $\vec{p}=m\vec{v}$ $E_{\mathrm{k}}=mv^{2}/2$

问题：将一绕通过质心的固定轴转动的圆盘视为一个质点系，系统总动量为多少？




系统总动量为零，系统有机械运动，总动量却为零？

说明不宜使用动量来量度转动物体的机械运动量。

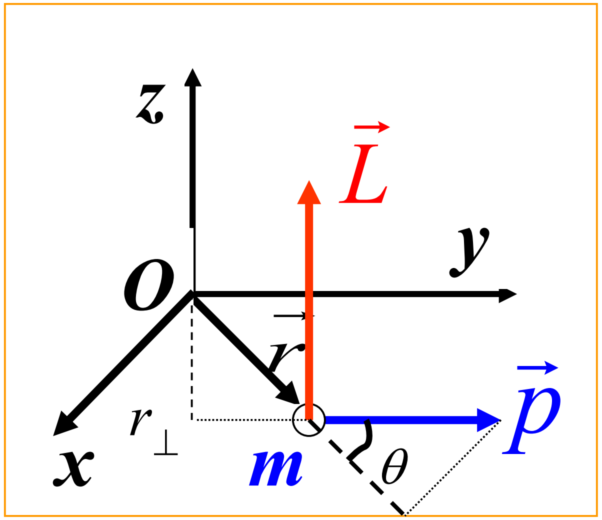
*引入与动量 $\vec{p}$ 对应的角量 $\vec{L}$——角动量（动量矩）

动量对参考点（或轴）求矩

# 一　质点的角动量和刚体的角动量

## 1. 质点的角动量

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

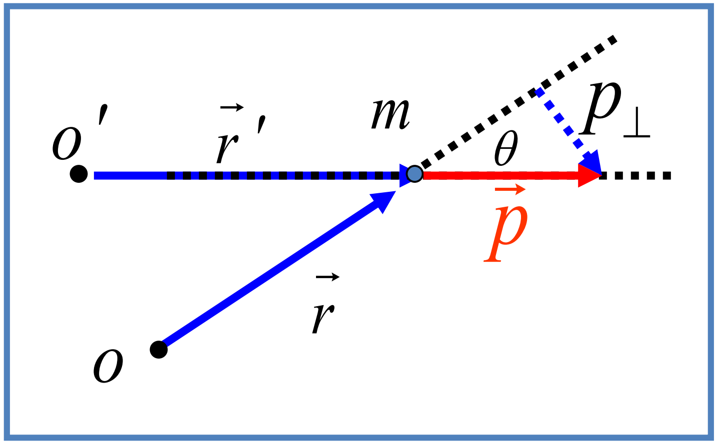



$$\vec{L}\Rightarrow\begin{cases}\text{大小：}\quad L=rmv\sin\theta\\ \text{方向：垂直于}\ \vec{r}\ \text{和}\ \vec{p}\ \text{组成的平面}\\ \qquad\text{服从右手螺旋法则。}\\ \text{单位：}\quad \mathrm{kg\cdot m^{2}\cdot s^{-1}}\end{cases}$$

设 $m$ 作直线运动

以 $O'$为参考点：　$\vec{L}'=0$

以 $O$ 为参考点：　$\vec{L}\neq 0$




**角动量与所取的惯性系有关；角动量与参考点的位置有关**

质点对某参考点的角动量反映质点绕该参考点旋转运动的强弱。

## 2. 质点系角动量

系统内所有质点对同一参考点角动量的矢量和

设各质点对O点的位矢分别为：$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots\ldots \vec{r}_i \ldots\ldots$

动量分别：$\vec{P}_1, \vec{P}_2 \ldots\ldots \vec{P}_i \ldots\ldots$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

# 3. 定轴转动刚体的角动量

转轴 $z$，角速度 $\vec{\omega}$

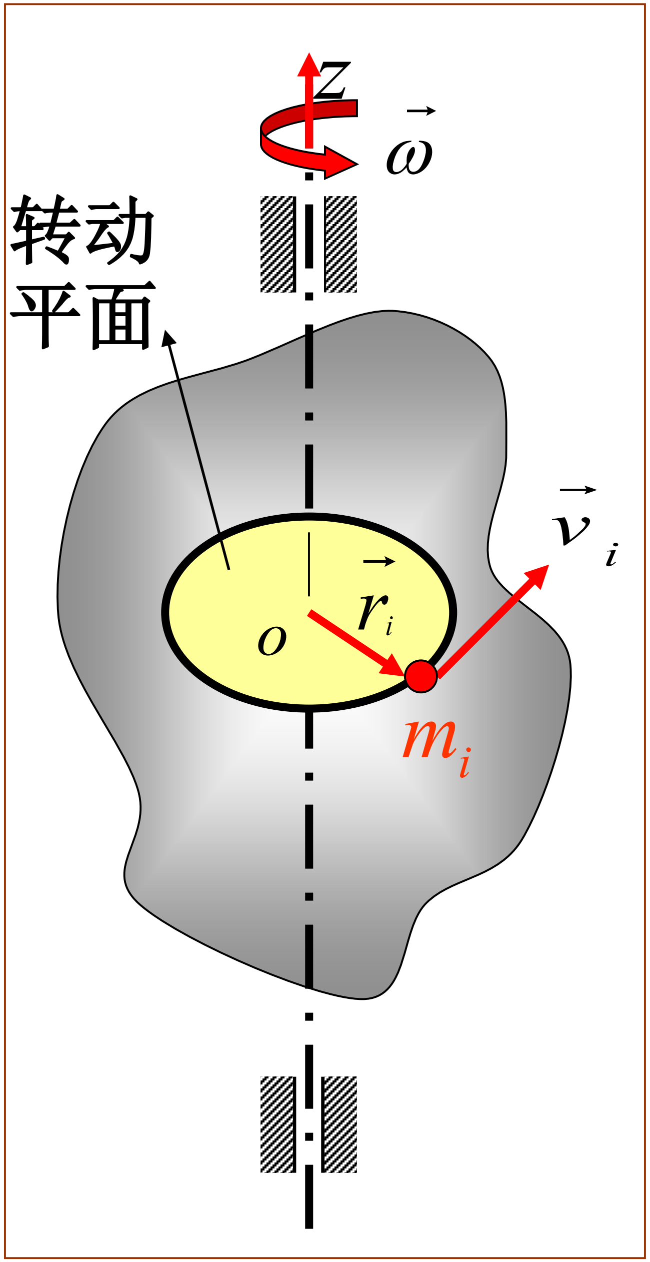
转轴与转动平面交点 $O$

刚体上任一质点 $m_i$

$m_i$对$O$的角动量：$\vec{L}_{io} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\vec{L}_{io} \Rightarrow \begin{cases} \text{大小} : L_{io} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega \\ \text{方向} : \text{沿 } \vec{\omega} \end{cases}$$

即 $\vec{L}_{io} = m_i r_i^2 \vec{\omega}$



刚体定轴转动的特点：

(1) 各质点均在垂直于转轴的转动平面内，作半径不同的圆周运动。

(2) 各质点的角速度 $\vec{\omega}$ 大小相等，且均沿轴向。

**刚体对 z 轴的总角动量为**

$$L_z = \sum_i L_{iz}$$

$$= \sum_i r_i^2 m_i \omega$$

$$= \omega \sum_i r_i^2 m_i$$

$$= J\omega$$

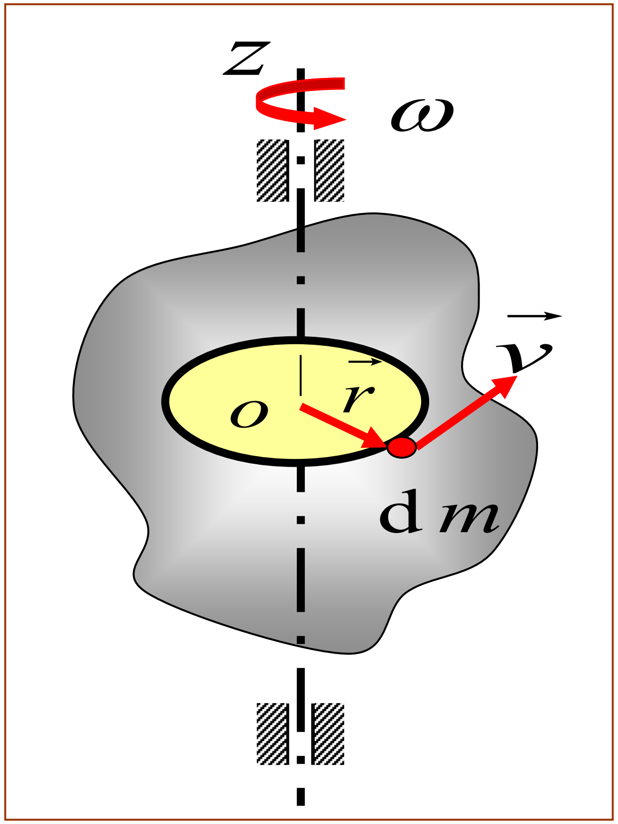
$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$$

对质量连续分布的刚体：

$$L_z = \int \mathrm{d} L_z = \int r^2 \omega \,\mathrm{d} m$$

$$= \omega \int r^2 \mathrm{d} m = J \omega$$

$$\boxed{\vec{L} = J \vec{\omega}}$$



# 二 刚体定轴转动的角动量定理

## 1. 质点角动量的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

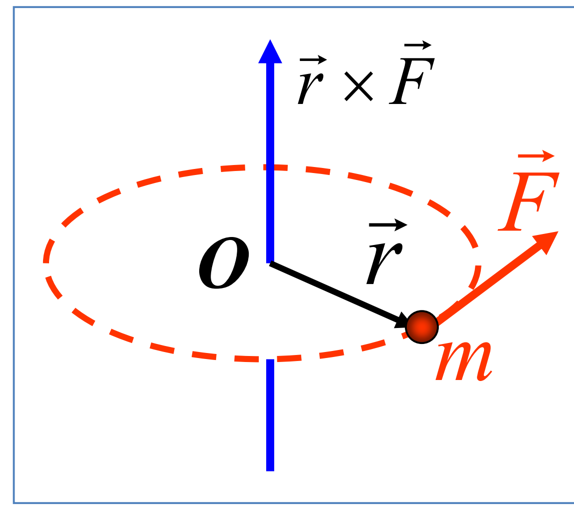
**质点的角动量定理**

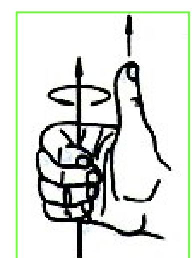
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$

所以 $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \underset{\text{质点位矢}}{\vec{r}} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \underset{\text{合力}}{\vec{F}} = \vec{M}$



## 2. 质点系角动量的时间变化率

对 N 个质点 $m_1, m_2, \cdots, m_N$ 组成的质点系，由

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ 可得

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_{1外} + \vec{M}_{1内}$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_{2外} + \vec{M}_{2内}$$

$$\cdots \cdots$$

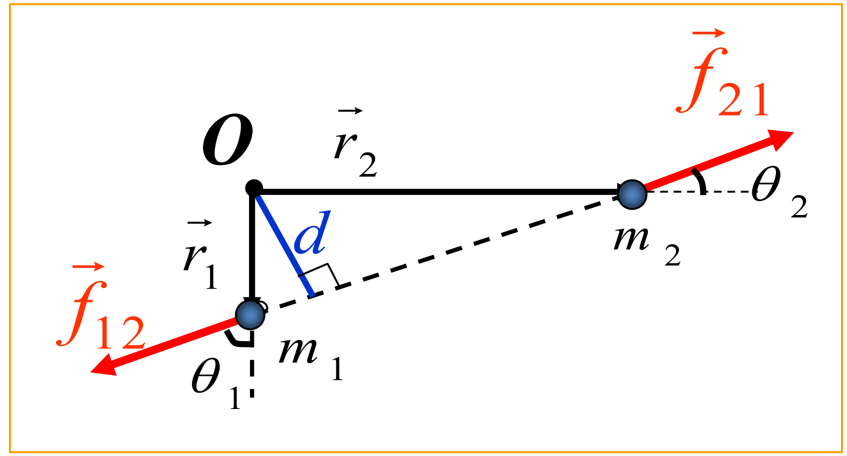
$$\frac{d\vec{L}_N}{dt} = \vec{M}_{N外} + \vec{M}_{N内}$$

两边求和得

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i外} + \sum_i \vec{M}_{i内}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_{i外} + \sum_i \vec{M}_{i内}$$

由图可知




$$\sum_i \vec{M}_{i内} = 0$$

于是：$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{外} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i外}$$

**质点系的角动量定理**

质点系总角动量的时间变化率等于质点系所受外力矩的矢量和。内力矩只改变质点系总角动量在系内的分配，不影响总角动量。

## 3. 定轴刚体的角动量定理

由 $L_z = \omega \sum_i r_i^2 m_i = J\omega$ $\qquad \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{外}$

得 $M_z = \dfrac{dL_z}{dt} = \dfrac{d}{dt}(J\omega) = J\dfrac{d\omega}{dt} = J\alpha$

刚体定轴转动的角动量定理的积分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} M\,dt = \int_{L_1}^{L_2} dL = J\omega_2 - J\omega_1$$

# 角动量定理的积分形式

| | 微分形式 | 积分形式 |
|---|---|---|
| 质点 | $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ | $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}$ |
| 质点系 | $\vec{M}_{外}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ | $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2}\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}$ |
| 定轴刚体 | $M_{轴}=J\beta=J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ | $\int_{t_1}^{t_2}M_{轴}\,\mathrm{d}t=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\,\mathrm{d}\omega=J\Delta\omega$ |

**注意：**

(1) 力矩对时间的积累：角冲量（冲量矩）

定义：$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$　　　　效果：改变角动量

(2) 比较：

$\vec{L}\begin{cases} \text{变化率}\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)\text{与 } \vec{M} \text{ 对应} \\ \text{变化量}(\Delta\vec{L})\text{与 } \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t \text{ 对应} \end{cases}$

$\vec{p}\begin{cases} \text{变化率与 } \vec{F} \text{ 对应} \\ \text{变化量与 } \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t \text{ 对应} \end{cases}$

(3) 同一式中，$\vec{M}$，$\vec{L}$，$J$，$\vec{\omega}$ 等角量

要对同一参考点或同一轴计算。

# 三 角动量守恒定律

对质点系

由角动量定理：$\int_{t_2}^{t_1} \vec{M}_{外} \mathrm{d}t = \Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

当 $\vec{M}_{外} = 0$ 时， $\Delta \vec{L} = 0$ $\boxed{\vec{L} = \text{恒矢量}}$

分量式：$\begin{cases} M_x = 0 \text{ 时} & L_x = \text{恒量} \\ M_y = 0 \text{ 时} & L_y = \text{恒量} \\ M_z = 0 \text{ 时} & L_z = \text{恒量} \end{cases}$

对定轴转动刚体，当 $M_{轴} = 0$ 时，$L_{轴} = \text{恒量}$

➢在冲击等问题中 $\because M^{\mathrm{in}} >> M^{\mathrm{ex}}$ $\therefore L \approx$ 常量

# 角动量守恒定律

当质点系所受外力对某参考点（或轴）的力矩的矢量和为零时，质点系对该参考点（或轴）的角动量守恒。

**1.守恒条件：** $\vec{M}_{外} = 0$ **或** $M_{轴} = 0$

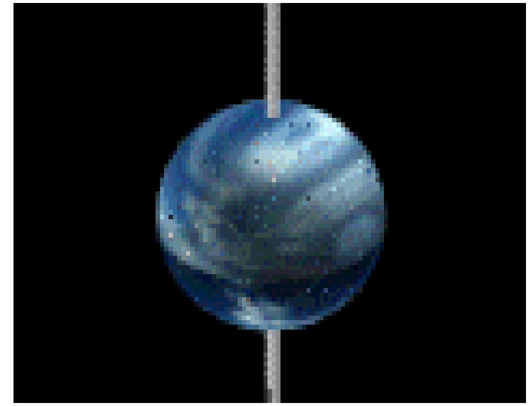
能否为 $\int \vec{M}_{外} \mathrm{d} t = 0$ ?

不能，后者只能说明初、末态角动量相等，不能保证过程中每一时刻角动量相同。

**2. 与动量守恒定律对比：**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{当 } \vec{F}_{外} = 0 \text{ 时，} & \vec{p} = \text{恒矢量} \\ \text{当 } \vec{M}_{外} = 0 \text{ 时，} & \vec{L} = \text{恒矢量} \end{array}\right\} \text{彼此独立}$$

# 角动量守恒定律应用举例



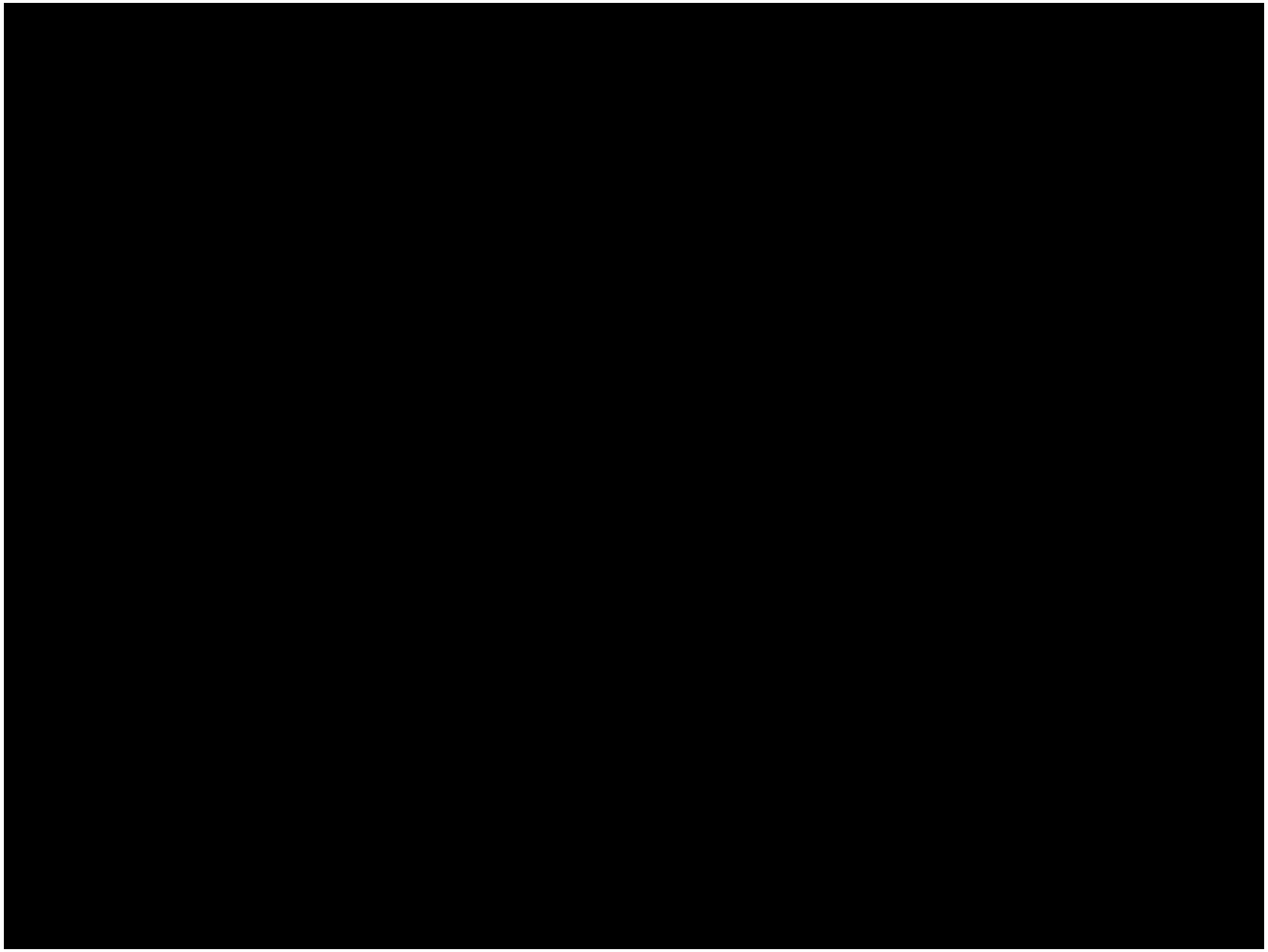
角动量守恒定律适用于以下情况：

(1)对于单一刚体：$J$、$\vec{\omega}$ 均不变，则匀速转动

(2) 对于系统: $J_i$、$\vec{\omega}_i$均可以变化，但 $\sum J_i\vec{\omega}_i$不变

(3) 对于变形体：$J, \vec{\omega}$ 均可以变化，但 $J\vec{\omega}$ 不变

# 陀螺仪 Gyroscope



Source

# 有心力场中的运动

物体在有心力作用下的运动

力的作用线始终通过某定点的力

力心

有心力对力心的力矩为零，只受有心力作用的物体对力心的角动量守恒。

应用广泛，例如：

天体运动（行星绕恒星、卫星绕行星……）

微观粒子运动（电子绕核运动；加速器中粒子与靶核散射……）

例 关于力矩有以下几种说法:

（1）内力矩不会改变刚体对某个轴的角动量;

（2）作用力和反作用力对同一轴的力矩之和必为零;

（3）质量相等，形状和大小不同的两个刚体，在相同力矩的作用下，他们的角加速度一定相等;

在上述说法中

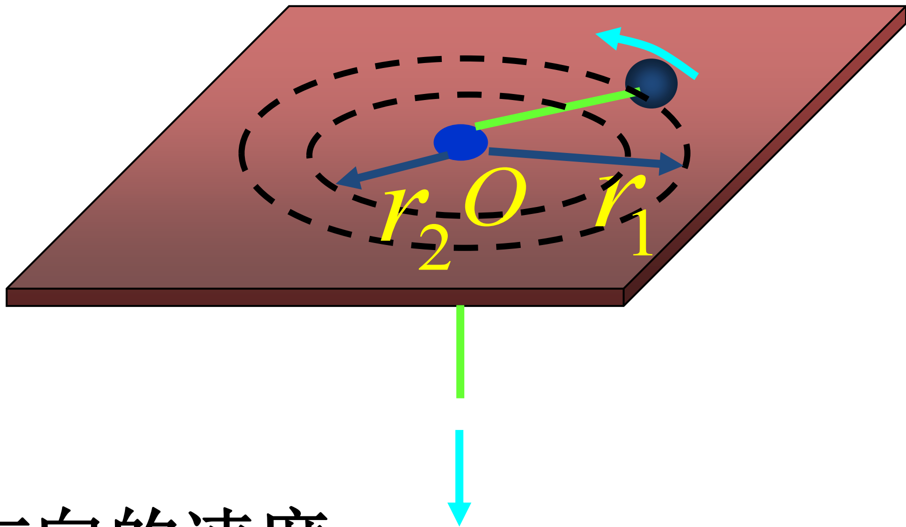
(A) 只有（2）是正确的;

★(B)（1）、（2）是正确的;

(C)（2）、（3）是正确的;

(D)（1）、（2）、（3）都是正确的.

例　细绳一端拴着质量为$m$的小球,另一端穿过水平桌面上的小孔$O$。先使小球在桌面上以速度$v_1$沿半径为$r_1$的圆周匀速转动，然后非常缓慢地将绳向下拉，使半径减小到$r_2$。设小球与桌面的摩擦不计，求此时小球的速度和拉力$T$对小球所作的功




**解：**绳子拉力对$O$ 点的力矩为零

由角动量守恒有

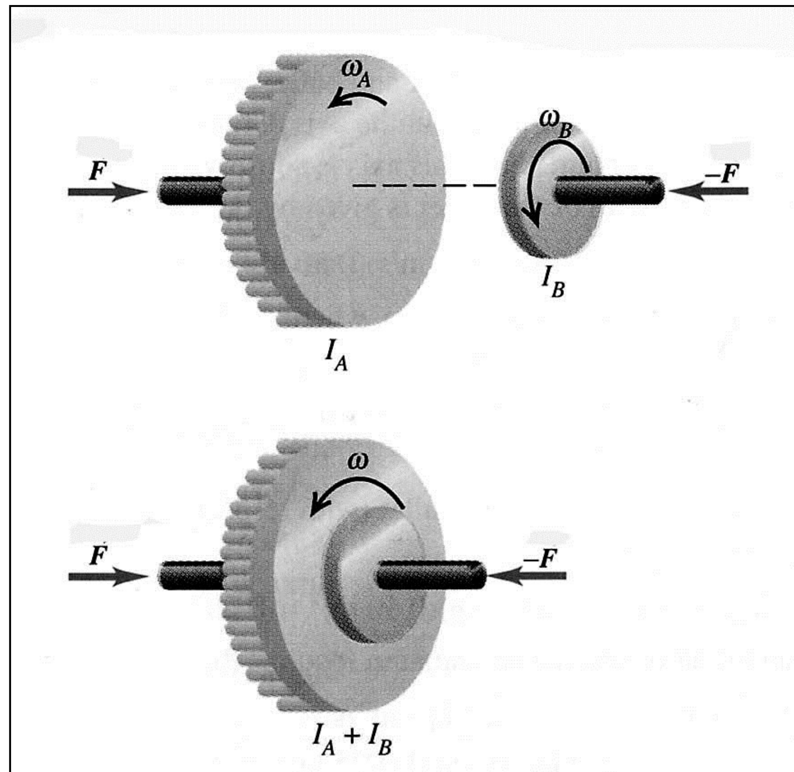
$$\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

因缓慢拉绳，忽略小球沿绳方向的速度

$$\therefore\ r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1\right]$$

**例** 两个转动惯量分别为 $J_1$ 和 $J_2$ 的圆盘 $A$和 $B$. $A$ 是机器上的飞轮， $B$ 是用以改变飞轮转速的离合器圆盘. 开始时， 他们分别以角速度 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 绕水平轴转动． 然后, 两圆盘在沿水平轴方向力的作用下. 啮合为一体， 其角速度为 $\omega$， **求** 齿轮啮合后两圆盘的角速度.




**解:** 系统角动量守恒

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$$

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{(J_1 + J_2)}$$

# 作业

- **P113：18；23；24**